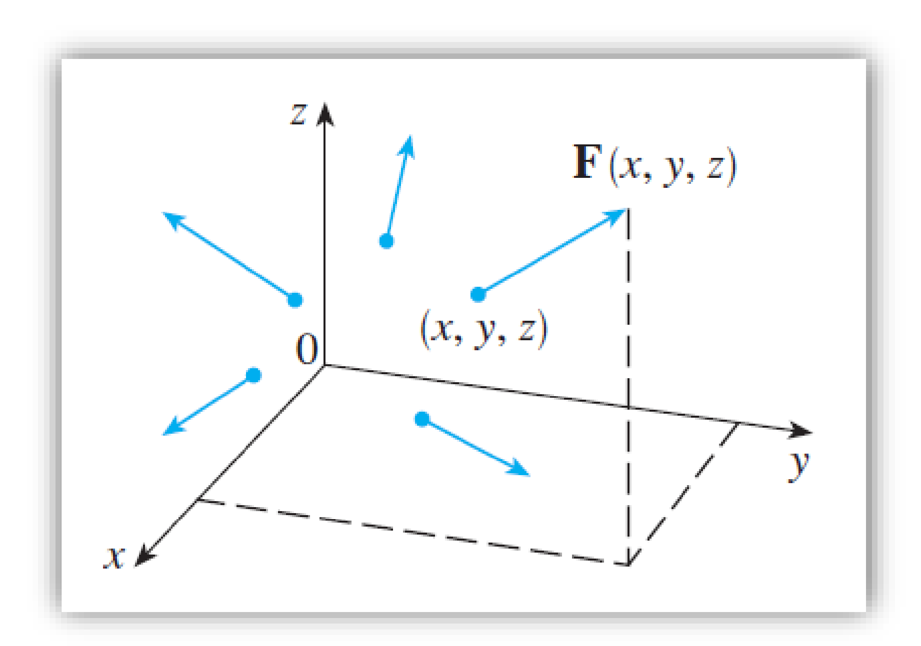
Campos vectoriales

1 Definición Sea D un conjunto en $\mathbb{R}^2$ (una región plana). Un **campo vectorial sobre** $\mathbb{R}^2$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y) en D un vector bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

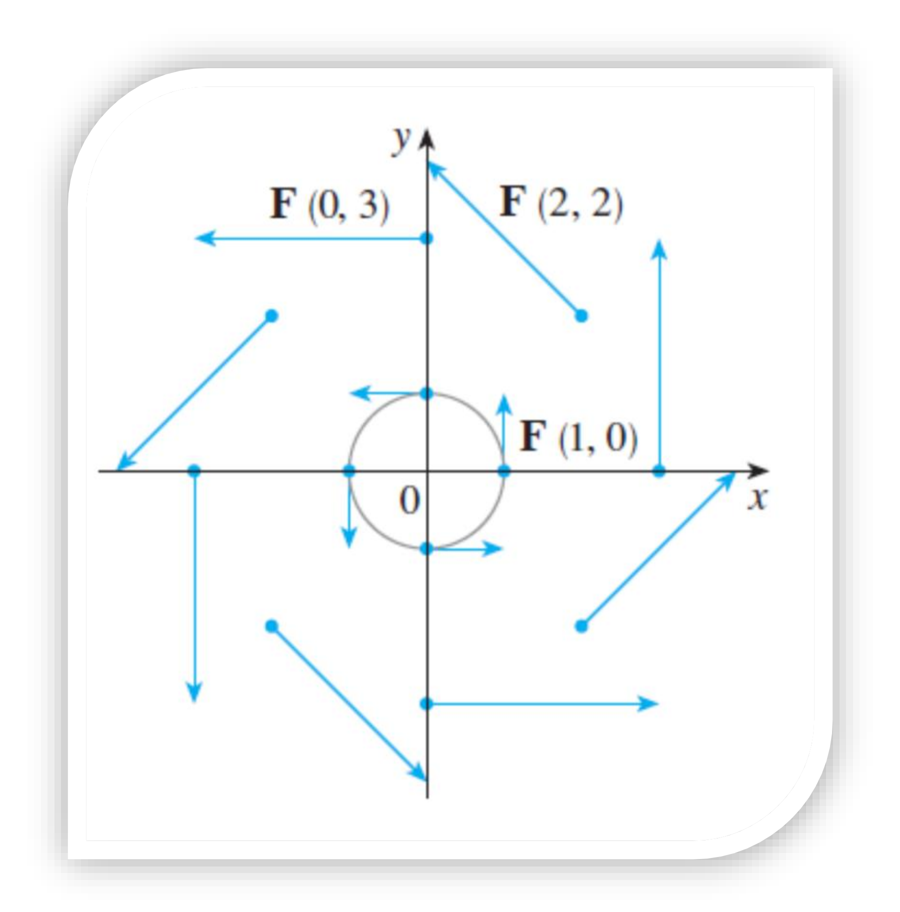
2 Definición Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Un **campo vectorial sobre** $\mathbb{R}^3$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y, z) en E un vector tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.



EJEMPLO 1

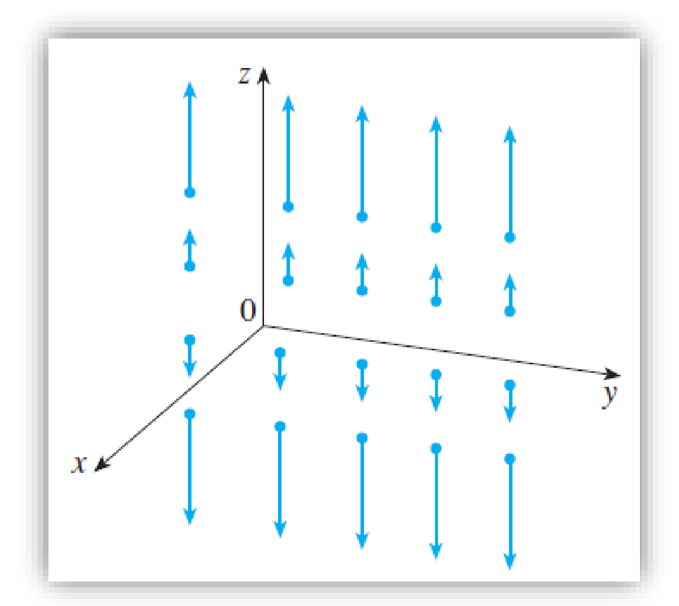
Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ está definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$.

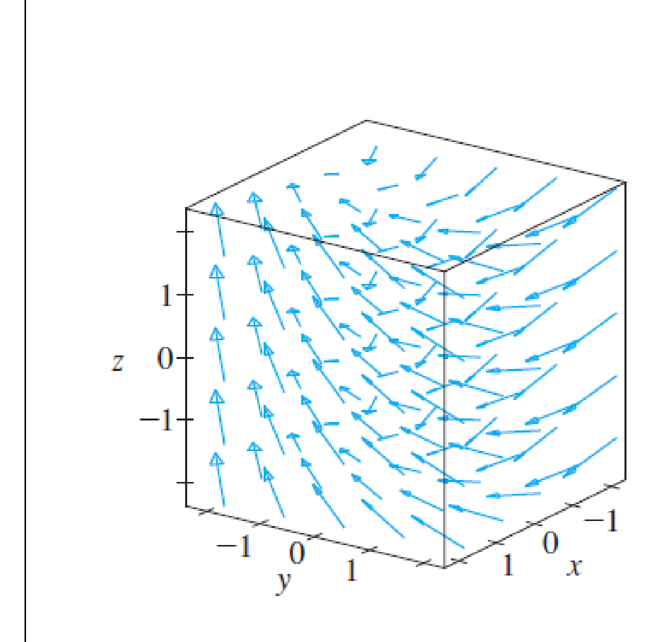
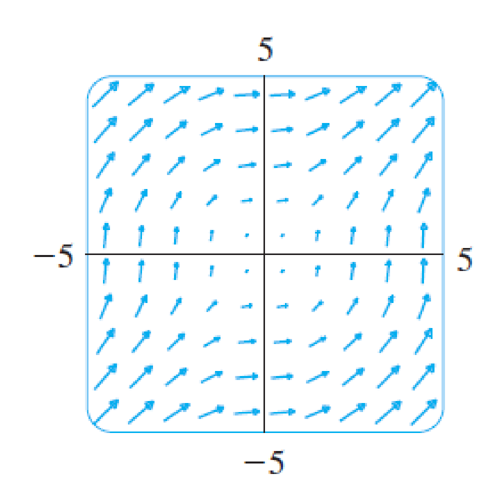
(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$



EJEMPLO 2

Dibuje el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$.



 $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$	 $\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2) \rangle$

Integrales de línea

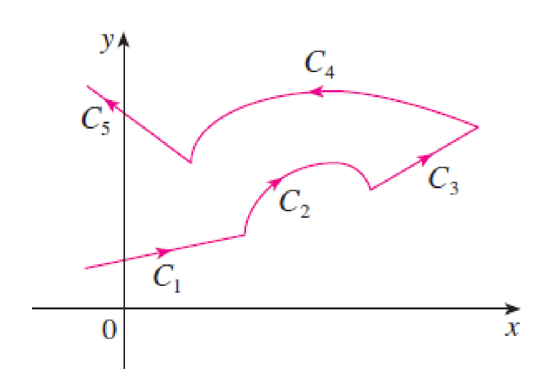
2 Definición Si f se define sobre una curva C suave dada por las ecuaciones 1, entonces la **integral de línea de f a lo largo de C** es

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$$

si este límite existe.

Para calcular usamos.

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$



$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

Se les llama **integrales de línea de f a lo largo de**

C respecto a x y y:

$$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta y_i$$

Las fórmulas siguientes establecen que las integrales de línea respecto a x y y se pueden también evaluar expresando todo en términos de t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$.

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t)\, dt$$

A menudo sucede que las integrales de línea respecto a x y y se presentan juntas. Cuando esto sucede, se acostumbra abreviarlas escribiendo

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Definición Sea **F** un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Entonces la **integral de línea de F a lo largo de C** es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

OBSERVACIÓN

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \text{donde } \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$